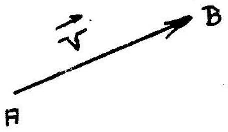
الفصل الأول

جبر الأشعة

١-١- تعاريف : الشعاع المقيد في فراغ ماهو زوج مرتب من نقط هذا الفراغ ،تسمى مركبته الاولى مبدأ الشعاع المقيد وتسمى مركبته الثانية منتهى هذا الشعاع.

لذلك يمكننا تمثيل الشعاع المقيد بقطعة مستقيمة موجهة $\overline{AB}$ حيث تكون A مبدأ الشعاع و B منتهاه.
ولتمييز مبدأ الشعاع على منتهاه اصطلح على وضع سهم يتجه نحو منتهى الشعاع (شكل ١-١) .



(شكل ١-١)

نرمز للشعاع المقيد ب $\overrightarrow{AB}$ اوب AB،كما يمكن ان نرمز له بحرف واحد $\vec{v}$ او v .

تسمي المستقيم المار بمبدأ الشعاع المقيد ومنتهاه حامل الشعاع وتسمي كل مستقيم موازٍ لحامل الشعاع المقيد منحى الشعاع وتسمي البعد بين النقطتين A و B طول الشعاع ونرمز له ب $|\overrightarrow{AB}|$ او ب $|\vec{v}|$.

نرى مما سبق ان الشعاع المقيد يتعين بأربعة عناصر هي المبدأ والمنحى والطول والجهة .

تسمي الشعاع الذى يساوى طوله الصفر ، أى الشعاع الذى ينطبق

مبدوءه على منتهاه ، الشعاع الصفرى ونرمز له بـ $\vec{0}$ او بـ 0 اذا لم يكن هنالك اى التباس .

نقول عن شعاعين مقيدين غير صفريين انهما متوازيان اذا اتفقا بالمنحى ،ونقول عنهما انهما متعاكسان اذاكان لهما طول واحد واتفقا في المنحى واختلفا في الجهة ،ونقول عنهما انهما متعاكسان مباشرة اذا كانا متعاكسين وكان لهما حامل مشترك .

ونقول عن شعاعين مقيدين $\vec{AB}$ و $\vec{A'B'}$ انهما متساويان اذا كان لهما مبدأ واحد ومنتهى واحد ،أى اذا كانت A منطبقة على A' وكانت B منطبقة على B' . وعلى هذا كي يتساوى شعاعان مقيدان فلا يكفي ان يتساويا في الطول بل يلزم ايضا ان يكون لهما مبدأ واحد ومنحى واحد وجهة واحدة .

ونقول عن شعاعين مقيدين غير صفريين انهما متسايران اذا كان لهما طول واحد ومنحى واحد وجهة واحدة .

ويسهل علينا ان نرى ان علاقة التساير انعكاسية (فكل شعاع مقيد مساير لنفسه) وتناظرية (لانه اذا كان الشعاع المقيد $\vec{AB}$ مسايرًا لـ $\vec{A'B'}$ فان $\vec{A'B'}$ مسايرا لـ $\vec{AB}$) ومتعدية (اذا كان $\vec{AB}$ و $\vec{A'B'}$ متسايرين وكان $\vec{A'B'}$ و $\vec{A''B''}$ متسايرين فان $\vec{AB}$ و $\vec{A''B''}$ متسايران) ولذلك فان علاقة التساير علاقة تكافوء وبالتالي فهي تصنف الاشعة المقيدة في فراغ ما الى صفوف تكافوء منفصلة .

يسمى كل صف تكافوء شعاعا طليقا. فعندما نقول ،اذن ، ان $\vec{AB}$ شعاع طليق فاننا نعني بذلك جميع الاشعة المسايرة لهذا الشعاع.

وعلى هذا فاننا عندما نتحدث عن الشعاع المقيد $\vec{AB}$ فانما نعني شعاعا وحيدا يبدأ بـ A وينتهي بـ B . اما اذا كنا نتحدث عن الشعاع الطليق $\vec{AB}$ فاننا نعني بذلك الشعاع المقيد $\vec{AB}$ أو أي

شعاع اخر يتفق معه بالطول والمنحى والجهة .

واذا وصفنا شعاعين طليقين بانهما متساويان فاننا نريد بذلك انهما ينتميان لصف تكافوء واحد. أى ،بعبارة اخرى ، يمثلان شعاعا طليقا واحدا. واذا قلنا عن شعاعين طليقين انهما متعاكسان فاننا نعني بذلك ان ممثلاً للشعاع الاول يعاكس ممثلاً للشعاع الثاني.

ومن الواضح انه لايمكن وصف شعاعين طليقين بانهما متعاكسان مباشرة .

واذا قلنا عن شعاع طليق فراغي انه يقع في مستو معين فاننا نقصد بذلك ان منحاه يوازى هذا المستوي ،واذا قلنا عنه انه يمر بنقطة معينة فاننا نقصد ذلك الممثل له الذى يمر بتلك النقطة .

واما الرمز الذى نستخدمه للشعاع الطليق فلا يختلف عن رمز الشعاع المقيد غير اننا سنتفق انه اذا كنا نتحدث عن الشعاع الطليق $\vec{V}$ فاننا نكتفي بالقول الشعاع $\vec{V}$ مهملين كلمة (طليق) . اما اذا كان الحديث عن الشعاع المقيد فاننا نشير الى ذلك صراحة .

وبالاضافة الى الشعاعين الطليق والمقيد هنالك الشعاع المنزلق . والشعاع المنزلق $\vec{V}$ هو ذلك الشعاع المقيد $\vec{V}$ او أى شعاع اخر يتفق معه بالطول والجهة والحامل.

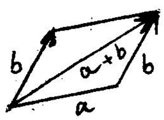
ان الشعاع أداة رياضية تساعد على تعيين العديد من الكميات الفيزيائية (كالسرع والتسارعات والقوى وشدات الحقول) التي لاتكفي لتعيينها الاعداد وحدها بل لابد من ذكر اتجاهها (منحاها وجهتها).

ولتركيب شعاعين او اكثر نحتاج الى تحديد قواعد حسابية تشبه القواعد المتبعة عند تركيب مقادير عددية . وبسبب هذا التشابه فاننا سنستخدم الكلمات جمع وطرح وضرب وتقسيم للاشارة الى العمليات

بين الاشعة ، كما نستعمل ايضا بعض الرموز المستعملة في جبر الاعداد غير انه يجدر بنا ان ننبه من الان الى ان هذه الكلمات والرموز ستحمل معاني جديدة تختلف عن المعاني التي اعطيت لها في جبر الاعداد.

١-٢ – جمع الاشعة : اذا كان لدينا شعاعان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ واذا جعلنا مبدأ الشعاع $\vec{b}$ منطبقا على منتهى الشعاع $\vec{a}$ فعندئذ نسمي الشعاع الذى مبدوءه مبدأ $\vec{a}$ ومنتهاه منتهى $\vec{b}$ مجموع الشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ونرمز له ب :

$$\vec{a} + \vec{b}$$



شكل (١-٢)

وبملاحظة الشكل (١-٢) ندرك ان :

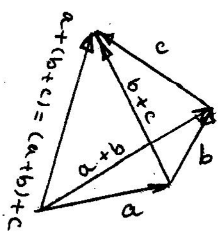
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad (1-2,1)$$

فجمع شعاعين يخضع للخاصة التبديلية .

ونرى في الشكل (١-٣) المجموعين $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ و $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
ومنه ندرك ان جمع الاشعة يخضع للخاصة التجميعية :

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \qquad (1-2,1)$$

وعلى هذا فاننا سوف نستغني عن الاقواس في مثل عملية الجمع هذه .



شكل (١-٣)

١-٣- ملاحظات :

(١) بما ان حاصل جمع شعاعين ينطبق كما نرى من الشكل (١-٢) ،على قطر متوازى الاضلاع المنشأ على الشعاعين فان طول حاصل جمع شعاعين لايساوى مجموع طوليهما مالم يتفق الشعاعان بالمنحى والجهة ،فعندئذ فقط يكون طول حاصل جمعهما يساوى مجموع طوليهما.

(٢) ان حاصل جمع شعاعين متعاكسين يساوى الصفر.

(٣) اذا كان لدينا الاشعة $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \cdots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$
حيث يكون مبدأ كل منهما منطبقا على منتهى الذى سبقه ، فان حاصل جمع هذه الاشعة هو :

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n} \qquad (1-3,1)$$

فهو الشعاع الذى ينطبق مبدوءه على مبدأ الاول وينطبق منتهاه على منتهى الاخير . تسمى العلاقة (1-3 ، 1) علاقة شال.

<u>١-٤ جداء شعاع بعدد.</u> ان حاصل ضرب شعاع $\vec{a}$ بعدد α ، ونرمز له بـ $\alpha\vec{a}$ هو شعاع منحاه منحى الشعاع وجهته جهة الشعاع $\vec{a}$ اذا كان α موجبا والجهة المعاكسة اذا كان α سالبا ، واما طوله فيساوى حاصل ضرب القيمة المطلقة لـ α بطول الشعاع $\vec{a}$ اى ان :

$$|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}| \qquad (1-4, 1)$$

وعلى هذا اذا كان α موجبا فان :

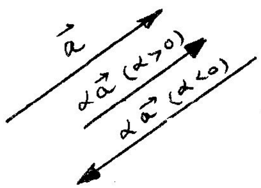
$$|\alpha\vec{a}| = \alpha|\vec{a}| \qquad (1-4, 2)$$

واذا كان α سالبا فان :

$$|\alpha\vec{a}| = -\alpha|\vec{a}| \qquad (1-4, 3)$$

اما اذا كان $\alpha = 0$ فان :

$$|\alpha\vec{a}| = 0 \qquad (1-4, 4)$$



شكل (١-٤)

ونحصل في الحالة الخاصة $\alpha = -1$ على الشعاع $-\vec{a}$ الذى يعاكس الشعاع $\vec{a}$ والذى نسميه نظير $\vec{a}$.

وليس من الصعب علينا ان نبرهن خواص ضرب شعاع بعدد التالية والتي تصح مهما كان الشعاعان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ومهما كان العددان α و β .

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

$$\alpha(\beta)\vec{a} = (\alpha\beta)\vec{a}$$

$$1\vec{a} = \vec{a}$$

١ـ٥ ـ ملاحظـــات :

(١) قد نكتب حاصل ضرب الشعاع $\vec{a}$ بالعدد α بالشكل $\alpha\vec{a}$ بدلا من αa

(٢) اذا كان $\vec{a}\neq\vec{0}$ فان $|\vec{a}|\neq 0$ وبالتالي ان حاصل ضـــرب الشعاع $\vec{a}$ بمقلوب طوله هو الشعاع $\vec{e} = \vec{a}/|\vec{a}|$. ان هذا الشعـاع $\vec{e}$ يتفق مع الشعاع $\vec{a}$ بالمنحى والجهة ، ولكن طوله يساوى واحـــــدة الاطـوال .

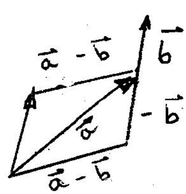
تسمى عملية الحصول على الشعاع $\vec{e}$ من الشعاع $\vec{a}$ تنظيم الشعاع ونقوا عن الشعاع $\vec{e}$ انه شعاع منظم.

١ ـ ٦ـ طرح الاشـعة . نعرف حاصل طرح شعاع $\vec{b}$ من آخر $\vec{a}$ ،ونرمزلـــه $\vec{a}-\vec{b}$ ، على انه حاصل جمع الشعـاع $\vec{a}$ الى نظير الشعاع $\vec{b}$.

اى ان :

$$\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b})$$

وبالنظر الى الشكل (١ـ ٥) ندرك انه للحصول على حاصل طرح الشعاع $\vec{b}$ من الشعاع $\vec{a}$ نجعـــل مبدأ الاول منطبقا على مبدأ الثاني فيكـــون $\vec{a}-\vec{b}$ هو الشعاع الذى ينطبق مبدوءه علـــى منتهى $\vec{b}$ وينطبق منتهاه على منتهى $\vec{a}$.



شكل (١ـ ٥)

١ـ ٧ ـ ملاحظة : ان مجموعة أشعة فراغ مع عملية الجمع تشكل زمـرة تبديلية لان حاصل جمع اى شعاعين هو شعاع ، ولان عملية الجمع ، كمـــا عرفناها ، تخضع للخاصيتين التبديلية والتجميعية . ان الشعاع الصفـــرى

هو العنصر المحايد لان :

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

ولكل شعاع $\vec{a}$ نظير $-\vec{a}$ لان:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

كذلك ان مجموعة اشعة فراغ مع عملية جمع الاشعة وعملية ضرب شعاع بعدد تشكلا فراغا شعاعيا

١ - ٨ - الارتباط الخطي : نقول عن شعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ انهما مرتبطان خطيا فيما اذا وجد عددان α و β غير منعدمين معا بحيث يكون :

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0} \qquad (1-8, 1)$$

اما اذا لم يوجد مثل هذين العددين ، اى (بعبارة اخرى) اذا لم تتحقق (1 ,8 - 1) الا اذا كان α و β معدومين معا فاننا نقول عن الشعاعين انهما مستقلان خطيا .

نلاحظ ان الشعاعين المرتبطين خطيا متوازيان او ان احدهما او كلاهما معدوم ،ونلاحظ ايضا انه لايمكن لشعاعين مستقلين خطيا ان يكونامتوازيين كما انه لايمكن لاى منهما ان يساوى الصفر.

وبوجه عام اذا كانت لدينا مجموعة مكونة من n شعاعا $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ فاننا نقول عن هذه المجموعة انها مرتبطة خطيا اذا وجد n عددا $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ليست جميعها معدومة بآن واحد ،بحيث يكون :

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0} \qquad (1-8, 2)$$

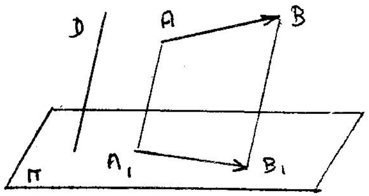
اما اذا لم توجد مثل هذه الاعداد ، اى اذا لم تتحقق (2 ,8 - 1) الا من اجل $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ فاننا نقول عن مجموعة الاشعة انها مستقلة خطيا.

ويسهل علينا ان ندرك انه اذا كان احد عناصر مجموعة اشعة هوالشعاع

الصفرى فان الاشعة $\vec{0}, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ مرتبطة خطيا . فلو كانت هي مجموعة الاشعة فان الاعداد $1, 0, 0, \dots, 0$ (وهي ليست جميعها معدومة بآن واحد) تحقق(2 , 8 - 1) لان:

كذلك نلاحظ انه اذا كان لدينا مجموعة من الاشعة $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وكانت مجموعة جزئية منها مرتبطة خطيا فان المجموعة $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ تكون ايضا مرتبطة خطيا .

<u>١ - ٩ - الاسقاط على مستو</u> . نفرض مستويا Π ومستقيما D غير مواز له ،وليكن $\vec{AB}$ شعاعا كما في الشكل (١ - ٦) . لنرسم من A مستقيما موازيا لـ D فيقطع المستوى Π في نقطة A_1 . نقول عن النقطة A_1 انها مسقط النقطة A على المستوى Π في الاسقاط الموازى لـ D .



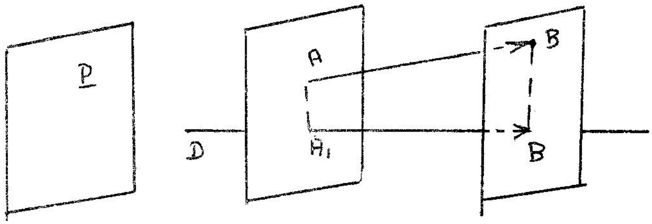
شكل (١ - ٦)

واذا اسقطنا كل نقطة من نقاط الشعاع $\vec{AB}$ ، فاننا نحصل على القطعة المستقيمة A_1B_1 ، حيث تكون A_1 مسقط A وتكون B_1 مسقط B . ندعو الشعاع $\vec{A_1B_1}$ مسقط الشعاع $\vec{AB}$ على المستوي Π في الاسقاط الموازى لـ D .

وفي الحالة الخاصة عندما يكون $\vec{AB}$ موازيا لـ D يكون مسقط الشعاع نقطة .

واذا كان D عموديا على Π قلنا عن الاسقاط انه قائم . وبما اننا سنعتمد في ابحاثنا على الاسقاط القائم فاننا سنطلق كلمة اسقاط على الاسقاط القائم فحسب ، واذا ماورد اسقاط مائل في ابحاثنا القادمة اشرنا الى ذلك صراحة .

١ـ ١٠ ـ الاسقاط على مستقيم : نفرض مستقيما D ومستويا P غير موازٍ له ،وليكن $\vec{AB}$ شعاعا كما في الشكل (١ـ ٧)



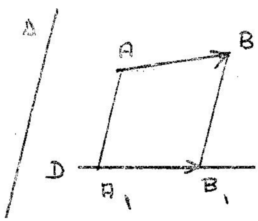
شكل (١ـ ٧)

لنرسم من A مستويا يوازي P فيقطع D في نقطة A_1 ، نقول عنها انها مسقط A على المستقيم D في الاسقاط الموازي لـ P . ويكون مسقط الشعاع $\vec{AB}$ شعاعا $\vec{A_1B_1}$ مبدوءه مسقط المبدأ A ومنتهاه مسقط المنتهى B . ويكون هذا المسقط الشعاع الصفري اذا كان $\vec{AB}$ موازيا لـ P .

وفي الهندسة المستوية نستبدل بالمستوى P مستقيما Δ كما في الشكل (١ـ ٨) . واذا كان Δ عموديا على D كان الاسقاط قائما .

١ـ ١١ ـ الاسقاط على محور :

اذا كان المستقيم Δ محورا موجها فاننا ندعو القياس الجبري للشعاع مسقط الشعاع $\vec{AB}$ على المحور المذكور



شكل (١ ـ ٨)

واذا كانت θ الزاوية (١) التي يصنعها الشعاع $\vec{AB}$ مع المحور Δ

---

(١) لتعريف الزاوية بين محورين Δ_1 و Δ_2 نرسم من نقطة O في ←

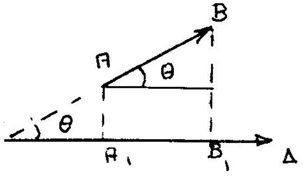
فان المسقط القائم لـ $\vec{AB}$ ونرمز له بـ $\underset{\Delta}{proj}\ \vec{AB}$ يعطى بـ :

$$\underset{\Delta}{proj}\ \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos\theta \qquad (1-11,1)$$

ملاحظـــة : يمكن بالاعتماد على علاقة شـال ان نثبت بسهولة نظرية المســاقط التـاليـة .

مسـقط مجموع اشـعة على مستو او مستقيم او محـور يساوي مجمـوع مساقط هذه الاشعة سواء أكان الاسقاط قائما او مائلا .

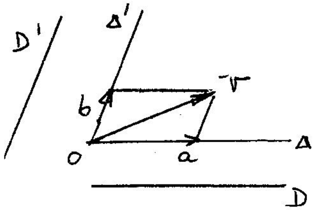
١ـ ١٢ ـ تفريق الاشعة : تفريق شعاع



شكل (١ـ ٩)

عملية معاكسة لجمع الاشعة فبدلا من ان نستبدل بعدة اشعة شعاعا وحيدا هـــو مجموعها ،نبحث في تفريق شعاع عن عدة اشعة يكون مجموعها الشعاع المفرو ض . ويتم التفريق باشكال مختلفة . وفيما يلي بعض الامثلة على ذلك .

(١) اذا كان D و D' مستقيمين غير متوازيين واذا رسمنا مـــن نقطة O مستقيمين Δ و Δ' موازيين لهما فعندئذ يتعين لدينا مستو لنفرض $\vec{V}$ شعاعا يقع في هذا المستوى ويمر من النقطة O . ليكن $\vec{a}$ مســقط $\vec{V}$ على Δ في الاسقاط الموازى لـ Δ' و $\vec{b}$ مسقط $\vec{V}$ على Δ' في الاســـــقاط الموازى لـ Δ فيكون : $\vec{V} = \vec{a} + \vec{b}$



شكل (١ـ ١٠)

الفراغ محورين Δ'_1 و Δ'_2 موازيين للمحورين المفروضين ومتحديـــن معهما بالاتجاه . ان اصغر الزاويتين بين نصفي المحورين الموجبيـــن Δ'_1 و Δ'_2 هي بالتعريف الزاوية بين Δ_1 و Δ_2 . نرمز لهذه الزاويـــة عادة بـ $\sphericalangle(\Delta_1, \Delta_2)$. وبمثل ذلك نعرف الزاوية بين شعاعيـــن او بين شعاع ومحور .

وبهذا نكون قد فرقنا الشعاع $\vec{V}$ الى شعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$.

علينا ان نلاحظ ان هذا التفريق الذى قمنا به يتم بشكل وحيد على Δ و Δ' ، لانه لو افترضنا جدلا وجود شعاعين اخرين $\vec{a}_1$ و $\vec{b}_1$ احدهما محمول على Δ والاخر على Δ_1 ومجموعهما يساوى $\vec{V}$ فعندئذ يكون :

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$$

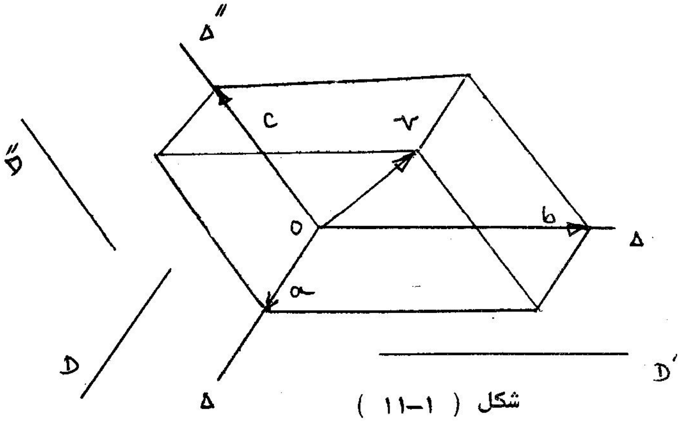
ومنه

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}) + (\vec{b}_1 - \vec{b}) = \vec{0} \qquad (1-12,1)$$

فاذا فرضنا ان $\vec{a}_1 \neq \vec{a}$ و $\vec{b}_1 \neq \vec{b}$ ، فعندئذ نفهم من(1 - 12 , 1) ان الشعاعين $\vec{a}_1 - \vec{a}$ و $\vec{b}_1 - \vec{b}$ مرتبطان خطيا فهما متوازيان وهذا غير ممكن لان $\vec{a}_1 - \vec{a}$ يوازى Δ و $\vec{b}_1 - \vec{b}$ يوازى Δ' وقد فرضنا ان Δ لايوازى Δ' .

اما اذا كان $\vec{a}_1 = \vec{a}$ فعندئذ نستنتج من(1 - 12 , 1) ان $\vec{b}_1 = \vec{b}$ وبالتالي فان التفريق يتم بشكل وحيد.

(٢) لتكن D و D' و D'' ثلاثة مستقيمات غير موازية لمستو واحد . لننشىء من نقطة O ثلاثة مستقيمات Δ و Δ' و Δ'' موازية على الترتيب لـD و D' و D'' . ليكن $\vec{V}$ شعاعا يمر بـ O . لننشىء متوازى سطوح ينطبق قطره على $\vec{V}$ واحد روءوسه في O وتنطبق احرفه المارة بـ O على المستقيمات Δ و Δ' و Δ'' فتتعين بذلك ثلاثة اشعة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ كما في الشكل (١- ١١) ويكون :



شكل (١-١١)

وبهذا نكون قد فرقنا الشعاع $\vec{V}$ الى ثلاثة اشعة . ويمكننا ان نثبت كما في الحالة الاولى ان هذا التفريق على Δ و Δ' و Δ'' يتم بشكلوحيد.

١- ١٣ - الجداء العددى (السلمي) لشعاعين . الجداء العددى لشعاعين غير صفريين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، ونرمز له بـ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ هوعدديعطى بـ :

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \qquad (1-13,1)$$

حيث تكون φ الزاوية بين الشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ أي $\varphi = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$.

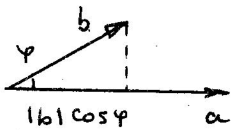
اى ان الجداء العددى لشعاعين غير صفريين هو حاصل ضرب طول الشعاع الاول بطول الشعاع الثاني بجيب تمام الزاوية بينهما .

اما اذا كان احد الشعاعين صفرا فاننا نعرف الجداء العددى لهما بأنه مساو للصفر.

ومن الواضح ان الجداء العددى لشعاعين غير صفريين يكون موجبا اذا كانت الزاوية φ بينهما حادة ،ويكون سالبا اذا كانت هذه الزاوية منفرجة ويكون معدوما اذا كان الشعاعان متعامدين .

وبما ان $|\vec{b}|\cos\varphi$ (انظر الشكل ١- ١٢)
يساوى القياس الجبرى لمسقط الشعاع $\vec{b}$
على الشعاع الاول $\vec{a}$ ، أى أن :

$$\text{proj}_{\vec{a}}\, \vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi$$



شكل (١-١٢)

فاننا نستطيع القول ان الجداء العددى لشعاعين غير صفريين يساوى جداء طول احدهما بالقياس الجبرى لمسقط الاخر عليه .

ويتمتع الجداء العددى بخواص هي:

(١) يلزم ويكفي لتعامد شعاعين غير صفريين هو ان يكون جداوءهما العددى معدوما .

فلقد رأينا قبل قليل انه اذا تعامد شعاعان فجداوءهما العددى معدوما وبالعكس اذا انعدم الجداء العددى لشعاعين غير صفريين فان $\cos\varphi = 0$ والشعاعان متعامدان .

(٢) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (الخاصة التبديلية)

وهذا واضح لان جيب تمام الزاوية بين شعاعين لا تتأثر اذا اعتبرنا احدهما الاول والاخر الثاني او بالعكس .

(٣) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (بفرض ان α عدد)

ولبرهان هذه الخاصة نلاحظ انه اذا كانت α موجبة فان:

$$(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = |\alpha\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\alpha\vec{a},\vec{b})$$
$$= \alpha|\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

استنادا الى $(1-4,2)$ ولان $\sphericalangle(\alpha\vec{a},\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ عندما تكون α موجبة ، اما اذا كانت α سالبة فان :

$$(\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\alpha\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\alpha\vec{a},\vec{b})$$
$$= -\alpha|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|(-\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))$$
$$= \alpha|\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}$$

وذلك استنادا الى (1-4,3) ولان $\measuredangle(\alpha\vec{a},\vec{b}) = \pi - \measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ عندما تكون α سالبة .

(٤)

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \qquad (1-13,2)$$

ولاثبات ذلك نلاحظ :

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= |\vec{a}|\ proj_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})\\ &= |\vec{a}|(proj_{\vec{a}}\vec{b}+proj_{\vec{a}}\vec{c})\end{aligned}$$

(استنادا الى نظرية المساقط)

$$\begin{aligned}&= |\vec{a}|\ proj_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|\ proj_{\vec{a}}\vec{c}\\ &= \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

وهو المطلوب

وبالاعتماد على الخاصة التبديلية نستطيع ان نثبت :

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} \qquad (1-13,3)$$

وبالاستفادة من (13-1,2) و (13-1,3) يمكننا ان نكتب :

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d}) = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$$

١-١٤- ملاحظات:

(١) نستطيع بالاستفادة من الجداء العددى ان نحسب طول شعاع وذلك لان الجداء العددى للشعاع بنفسه يساوى مربع طول الشعاع :

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$$

ومنه

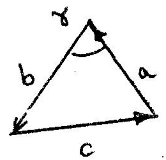
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

ونكتب احيانا $\vec{a}^2$ بدلا من $\vec{a}\cdot\vec{a}$ ، ولكننا لانستطيع ان نكتب $\vec{a}^3$ لان هذا الرمز لامعنى له .

وينبغي ان نلاحظ ان الجذر التربيعي لـ $\vec{a}^2$ هو طول الشعاع $\vec{a}$ وليس الشعاع $\vec{a}$.

(٢) ينبغي ان نلاحظ ان الخاصة التجميعية ليست صحيحة في الجداء العددي فمثلا ان $\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ شعاع يتفق مع الشعاع $\vec{c}$ بالمنحى لان $\vec{a}\cdot\vec{b}$ عدد ، في حين يكون $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$ شعاعا يتفق مع الشعاع $\vec{a}$ بالمنحى لان $\vec{b}\cdot\vec{c}$ عدد ، ولذلك فلا نستطيع القول ان هاتين الكميتين متساويتان .

١ – ١٥ – تطبيقات



شكل (١ – ١٣)

(١) لتكن $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ثلاثة اشعة منطبقة على اضلاع مثلث . كما في الشكل ١ – ١٣ . ان منتهى الشعاع $\vec{b}$ منطبق على مبدأ الشعاع $\vec{c}$ وان منتهى الشعاع $\vec{c}$ منطبق على مبدأ $\vec{a}$ ومنتهى $\vec{a}$ منطبق على مبدأ $\vec{b}$. اذن :

$$\vec{c} + \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$$

ومنه :

$$-\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

اذن :

$$\vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$

ولما كان : $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi - \gamma$: فإن :

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\gamma$$

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma$$

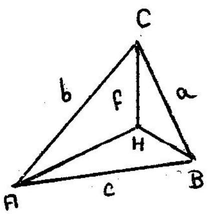
وفي حالة خاصة اذا كانت γ قائمة ، فاننا نرى :

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$

التي تعبر عن نظرية فيثاغورث الشهيرة .

(٢) سنثبت بالاستفادة من الجداء العددي ان ارتفاعات المثلث تتلاقى بنقطة واحدة . ليكن لدينا المثلث ABC ولتكن H نقطة تلاقي الارتفاعين النازلين من A و B ولنفرض $\overrightarrow{AH} = \vec{h}_A$ و $\overrightarrow{BH} = \vec{h}_B$ و $\overrightarrow{CH} = \vec{f}$. والمطلوب هو ان نثبت ان $\vec{f}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$.

لنلاحظ ان :



شكل(١– ١٤)

$$\vec{h}_A \cdot \vec{a} = 0 , \quad \vec{h}_B \cdot \vec{a} = 0$$

(1-15, 1)

وان :

$$\vec{c} = \vec{h}_A - \vec{h}_B , \quad \vec{a} = \vec{h}_B - \vec{f} , \quad \vec{b} = \vec{f} - \vec{h}_A$$

(1-15, 2)

بتعويض (1-15, 2) في (1-15, 1) نجد:

$$\vec{h}_A \cdot \vec{h}_B = \vec{h}_A \cdot \vec{f} = \vec{h}_B \cdot \vec{f}$$

اذن :

$$(\vec{h}_A - \vec{h}_B) \cdot \vec{f} = 0$$

او :

$$\vec{c} \cdot \vec{f} = 0$$

وهذا يعني ان $\vec{f}$ عمودي على $\vec{c}$ وهو المطلوب .